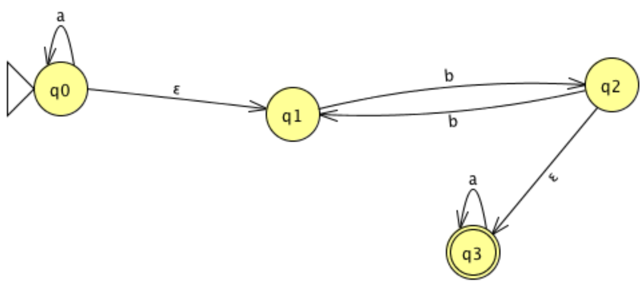
# Teoria degli automi e calcolabilità a.a. 2023/24
## Prova scritta 13 gennaio 2025

**Esercizio 1** Si consideri il seguente automa con $\epsilon$ transizioni:




1. Si descriva il linguaggio $L$ accettato da questo automa.
2. Si dia un NFA senza transizioni $\epsilon$ equivalente.
3. Si dia un DFA equivalente.

**Soluzione**

1. Il linguaggio accettato è $\{a^n b^{2m+1} a^k \mid n, m, k \geq 0\}$, ossia il linguaggio denotato dall'espressione regolare $a^\star b(bb)^\star a^\star$.
2. Un NFA senza transizioni $\epsilon$ equivalente è il seguente:

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow q_0$ | $q_0, q_1$ | $q_2, q_3$ |
| $q_1$ | | $q_2, q_3$ |
| $q_2$ | $q_3$ | $q_1$ |
| $\star q_3$ | $q_3$ | |

3. Un DFA equivalente è il seguente.

| | $a$ | $b$ |
|---|---|---|
| $\rightarrow \{q_0\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_2, q_3\}$ |
| $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_0, q_1\}$ | $\{q_2, q_3\}$ |
| $\star\{q_2, q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\{q_1\}$ |
| $\star\{q_3\}$ | $\{q_3\}$ | $\emptyset$ |
| $\{q_1\}$ | $\emptyset$ | $\{q_2, q_3\}$ |
| $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |

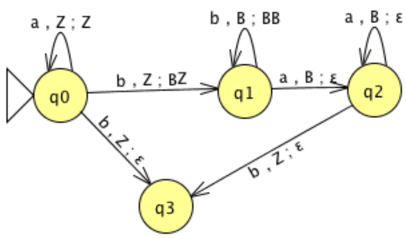
**Esercizio 2** Si consideri $L = \{a^n b^k a^k b \mid n, k \geq 0\}$.

1. Si dia una grammatica context-free che genera il linguaggio.
2. Si dia un automa a pila, se possibile deterministico, che riconosca il linguaggio (per pila vuota), spiegando su quale idea intuitiva è basato.
3. Il linguaggio è regolare? Si giustifichi formalmente la risposta.

**Soluzione**

1.
$$\begin{array}{lcl} S & ::= & AXb \\ A & ::= & \epsilon \mid aA \\ X & ::= & \epsilon \mid bXa \end{array}$$

2. Non è possibile riconoscere $L$ con un automa a pila deterministico, perché il linguaggio contiene due stringhe di cui una prefisso dell'altra, per esempio $b$ e $bab$. Un automa a pila non deterministico può essere costruito nel modo seguente:




3. Il linguaggio non è regolare, proviamolo con il pumping lemma. Fissato $n \geq 0$, consideriamo per esempio la stringa $b^n a^n b$, che appartiene al linguaggio. Decomponendo la stringa in $uvw$, con $|uv| \leq n$ e $|v| > 0$, si ha necessariamente che $u$ e $v$ sono formate di sole $b$. Quindi, per esempio, la stringa $uv^0w$ ha un numero di $b$ strettamente minore delle $a$ e quindi non appartiene al linguaggio.

**Esercizio 3** Si consideri la funzione ricorsiva primitiva che restituisce la somma di due numeri naturali vista a lezione.

$sum(x, Z) = x$
$sum(x, S(y)) = S(sum(x, y))$

Si diano tutte le possibili computazioni per l'espressione $sum(sum(S(Z), Z), sum(Z, S(Z)))$.

**Soluzione** Le computazioni possibili sono molte, le descrivo sommariamente sotto; ho dato 10 a chi ne ha descritte almeno due diverse.

- Per la prima sottoespressione l'unica riduzione è $sum(S(Z), Z) \rightarrow_1 S(Z)$.
- Per la seconda sottoespressione l'unica riduzione è $sum(Z, S(Z)) \rightarrow_2 S(sum(Z, Z)) \rightarrow_3 S(Z)$.
- Per l'espressione completa possiamo prima applicare le riduzioni (1) e (2-3) sopra in qualche ordine, ottenendo $sum(S(Z), S(Z)) \rightarrow S(sum(S(Z), Z)) \rightarrow S(S(Z))$; inoltre, dopo aver applicato la riduzione (2) possiamo anche applicare la seconda clausola a tutta l'espressione, per esempio nell'ordine mostrato sotto:

$$sum(sum(S(Z), Z), sum(Z, S(Z))) \rightarrow_1 sum(S(Z), sum(Z, S(Z))) \rightarrow_2 sum(S(Z), S(sum(Z, Z))) \rightarrow_4 S(sum(S(Z), sum(Z, Z))) \rightarrow_3 S(sum(S(Z), Z)) \rightarrow_1 S(S(Z))$$

**Esercizio 4** Siano $X$ un insieme ricorsivamente enumerabile, $\mathcal{M}_X$ un algoritmo che semidecide $X$, e $\mathcal{M}_X^k$ l'esecuzione di (al più) $k$ passi di tale algoritmo, che se dopo $k$ passi l'algoritmo non è terminato restituisce 0. Si descrivano in pseudocodice, utilizzando se possibile $\mathcal{M}_X$, altrimenti $\mathcal{M}_X^k$:

1. Un algoritmo che semidecide se, per qualche $x \leq 5$, $x \in X$.

2. Un algoritmo che semidecide se, per tutti gli $x \leq 5$, $x \in X$.

**Soluzione**

1. ```
   k = 0
   while (true)
     for x=0 to 5
       if (M_X^k(x)=1) return 1
     k++
   ```

2. ```
   for x=0 to 5
     if M_X(x)=0) return 0
   return 1
   ```

**Esercizio 5** Siano $A = \{x \mid \phi_x(y)\uparrow \text{ per qualche } y \leq 5\}$ e $B = \{x \mid \phi_x(y) = 0 \text{ per qualche } y \leq 5\}$.

1. Questi due insiemi sono ricorsivi?
2. L'insieme $A$ è ricorsivamente enumerabile?
3. Si dia, se possibile, una riduzione da $A$ in $B$.

**Soluzione**

1. No, essendo estensionali e non banali, per il teorema di Rice.
2. No, infatti il complementare di $A$, ossia $\overline{A} = \{x \mid \phi_x(y)\downarrow \text{ per ogni } y \leq 5\}$, è ricorsivamente enumerabile (possiamo eseguire in interleaving l'algoritmo su tutti gli $y \leq 5$, e se tutte le esecuzioni terminano otteniamo risposta positiva), quindi per il teorema di Post $A$ non può esserlo.
3. Non è possibile; infatti $B$ è ricorsivamente enumerabile con ragionamento analogo al punto precedente.