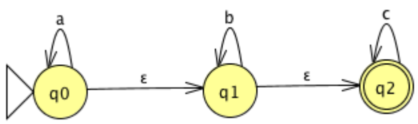
Teoria degli automi e calcolabilità a.a. 2022/23
Prova scritta 27 luglio 2023

Esercizio 1 Si consideri il seguente automa a stati finiti con transizioni silenti.



1. Si diano *tutte* le computazioni possibili per la stringa abc e si spieghi se la stringa è riconosciuta e perché.
2. Si descriva il linguaggio riconosciuto.
3. Si dia un DFA che riconosca lo stesso linguaggio (direttamente, ossia **senza** utilizzare le trasformazioni).

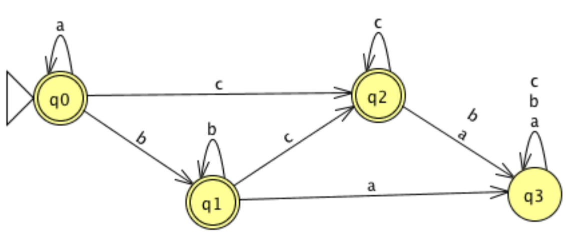
Soluzione

1. Tutte le computazioni possibili per la stringa abc sono:

$$\langle q_0, abc\rangle \xrightarrow{a} \langle q_0, bc\rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_1, bc\rangle \xrightarrow{b} \langle q_1, c\rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_2, c\rangle \xrightarrow{c} \langle q_2, \epsilon\rangle$$
$$\langle q_0, abc\rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_1, abc\rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_2, abc\rangle$$
$$\langle q_0, abc\rangle \xrightarrow{a} \langle q_0, bc\rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_1, bc\rangle \xrightarrow{\epsilon} \langle q_2, bc\rangle$$

   La stringa è accettata perché esiste una computazione che legge tutta la stringa e termina in uno stato finale.

2. Il linguaggio riconosciuto è $a^\star b^\star c^\star$.
3. Un DFA che riconosce lo stesso linguaggio è il seguente:

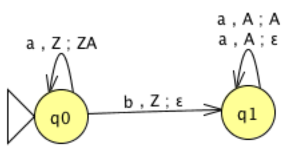


Esercizio 2 Si consideri il linguaggio $\{a^n b a^m \mid 0 \leq n \leq m\}$.

1. Si dica se è possibile riconoscerlo *per pila vuota* con un PDA deterministico (ossia: in caso di risposta positiva si dia un PDA deterministico che riconosca il linguaggio per pila vuota, in caso di risposta negativa lo si giustifichi, e si dia un PDA non deterministico).
2. Cosa cambia se consideriamo il linguaggio $\{a^n b a^m b \mid 0 \leq n \leq m\}$?

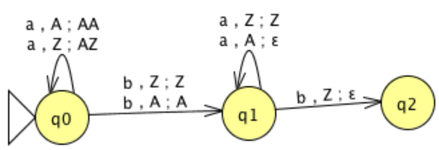
Soluzione

1. Non è possibile dare un PDA deterministico perché il linguaggio contiene due stringhe di cui una è prefisso dell'altra (per esempio, b e ba). Un PDA non deterministico che riconosce il linguaggio è il seguente:



   Si noti il non determinismo: leggendo a nello stato q_1, possiamo rimuovere o no una A dalla pila.

2. Se consideriamo il linguaggio $\{a^n ba^m b \mid 0 \leq n \leq m\}$ non ci sono più due stringhe di cui una prefisso dell'altra, quindi non possiamo escludere che si possa riconoscere con un DPDA. Parte successiva non richiesta: è in effetti possibile, per esempio con il seguente:



   Si noti che sostituendo la transizione da q_1 in q_2 con $\varepsilon, Z; \varepsilon$ si ottiene un altro possibile PDA non deterministico che riconosce il primo linguaggio.

Esercizio 3 Si consideri la seguente macchina di Turing usata come riconoscitore (q_3 è l'unico stato finale).

	a	b	B
q_0	q_1, B, R	q_0, B, R	q_3, B, N
q_1	q_2, B, R	q_1, B, R	q_3, B, N
q_2	q_2, a, R	q_2, b, R	q_2, B, R

1. Si descriva la computazione che ha come configurazione iniziale $\langle \epsilon, q_0, baba \rangle$.
2. Si descriva la computazione che ha come configurazione iniziale $\langle \epsilon, q_0, babb \rangle$.
3. Si descriva il linguaggio L accettato dalla macchina.
4. Dal fatto che L è il linguaggio accettato da questa macchina, possiamo concludere che sia ricorsivo?

Soluzione

1. $\langle \epsilon, q_0, baba \rangle \to \langle \epsilon, q_0, aba \rangle \to \langle \epsilon, q_1, ba \rangle \to \langle \epsilon, q_1, a \rangle \to \langle \epsilon, q_2, \epsilon \rangle \to \langle \epsilon, q_2, \epsilon \rangle \to \langle \epsilon, q_2, \epsilon \rangle \to \dots$
2. $\langle \epsilon, q_0, babb \rangle \to \langle \epsilon, q_0, abb \rangle \to \langle \epsilon, q_1, bb \rangle \to \langle \epsilon, q_1, b \rangle \to \langle \epsilon, q_1, \epsilon \rangle \to \langle \epsilon, q_3, \epsilon \rangle$
3. Il linguaggio accettato dalla macchina è l'insieme delle stringhe che non contengono due a.
4. No, possiamo solo concludere che sia ricorsivamente enumerabile.

Esercizio 4 Si considerino programmi che prendono in input una coppia di numeri naturali e restituiscono in output un numero naturale. Per ognuna delle seguenti affermazioni, si dica se è vera o falsa, motivando la risposta.

1. L'insieme dei programmi che su nessuna coppia $\langle x, y \rangle$ restituiscono x o y è ricorsivo.
2. L'insieme dei programmi che su nessuna coppia $\langle x, y \rangle$ restituiscono x o y è ricorsivamente enumerabile.
3. L'insieme dei programmi che su qualche coppia $\langle x, y \rangle$ restituiscono x in meno di y passi è ricorsivamente enumerabile.

Soluzione

- Falsa. Si tratta di una proprietà estensionale e non banale.
- Falsa. L'insieme complementare (ossia, l'insieme dei programmi che su qualche coppia $\langle x, y \rangle$ restituiscono x o y) è ricorsivamente enumerabile, in quanto si può utilizzare la tecnica a zig-zag, e non possono essere entrambi r.e. per il teorema di Post.
- Vera. Basta eseguire successivamente, per ogni coppia $\langle x, y \rangle$, il programma per y passi, e se c'è una coppia per la quale si ottiene x questa sarà trovata.

Esercizio 5 Si consideri la definizione di proprietà estensionale:

per ogni $x, y \in \mathbb{N}$, se $x \in \Pi$ e $\phi_x = \phi_y$, allora $y \in \Pi$

In base alla definizione, le proprietà banali ($\emptyset$ e $\mathbb{N}$) sono estensionali. Si spieghi perché, per ognuno dei due casi.

Soluzione Per ogni $x, y \in \mathbb{N}$: nel caso di $\emptyset$, si ha $x \notin \emptyset$ e quindi l'implicazione vale essendo la premessa falsa; nel caso di $\mathbb{N}$, si ha $y \in \mathbb{N}$, e quindi l'implicazione vale essendo la conseguenza vera.