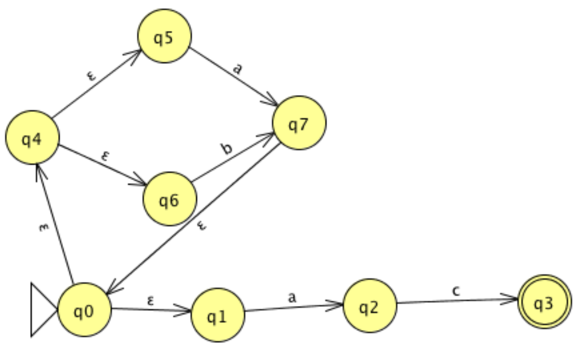
Teoria degli automi e calcolabilità a.a. 2022/23
Prova scritta 14 giugno 2023

Esercizio 1 Si consideri il seguente automa a stati finiti con transizioni silenti.



1. Si trasformi l'automa in un NFA eliminando le transizioni silenti.
2. Si dia un'espressione regolare che denota il linguaggio accettato.

Soluzione Diamo l'automa anche in formato tabellare:

	a	b	c	ϵ
$\rightarrow q_0$				q_1, q_4
q_1	q_2			
q_2			q_3	
$\star q_3$				
q_4				q_5, q_6
q_5	q_7			
q_6		q_7		
q_7				q_0

1. Un NFA senza transizioni ϵ equivalente è il seguente.

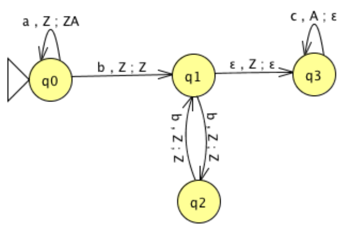
	a	b	c
$\rightarrow q_0$	$q_0, q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7$	$q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7$	
q_1	q_2		
q_2			q_3
$\star q_3$			
q_4	$q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7$	$q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7$	
q_5	$q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7$		
q_6		$q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7$	
q_7	$q_0, q_1, q_2, q_4, q_5, q_6, q_7$	$q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7$	

2. Un'espressione regolare che denota il linguaggio accettato è $(a+b)^\star ac$. Si può infatti notare che identificando in unico insieme A l'insieme di stati $\{q_0, q_1, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ si ottiene:

	a	b	c
$\rightarrow A$	A, q_2	A	
q_2			q_3
$\star q_3$			

Esercizio 2 Si consideri il linguaggio $L = \{a^n b^m c^n \mid m \text{ dispari}\}$. Si dia un'automa a pila che riconosce il linguaggio, spiegando su quale idea intuitiva è basato.

Soluzione Inizialmente, l'automa mette nella pila un simbolo A per ogni a letta, mantenendo Z in cima. Poi legge le b (almeno una) utilizzando due stati per controllare che il numero sia dispari, senza modificare la pila. infine rimuove la Z in cima e legge le c, controllando che siano in numero uguale alle a togliendo ogni volta un simbolo A dalla pila.



Esercizio 3 Si dia una macchina di Turing che, data in input una stringa di 0 e 1, produca in output la stringa privata degli 0. Quindi, per esempio, data la stringa 01100100, produce in output la stringa 111. **È assolutamente necessario dare prima una descrizione a parole dell'algoritmo,** e solo successivamente la matrice di transizione, preferibilmente usando nomi significativi per gli stati.

Soluzione Un algoritmo molto semplice (stato iniziale `0`) se trova uno 0 semplicemente lo cancella, mentre se trova un 1, cerca la fine della stringa da leggere (stato `goR`), cerca la fine della stringa di 1 già costruita (stato `goRR`) e aggiunge in fondo a questa un altro 1. Poi ritorna a sinistra (stati `goL` e `goLL` e ricomincia.

```
                  goR 0 0 r goR     goL 1 1 l goL
                  goR 1 1 r goR     goL _ _ l goLL
0 0 _ r 0         goR _ _ r goRR
0 1 _ r goR                         goLL 0 0 l goLL
0 _ _ r halt      goRR 1 1 r goRR   goLL 1 1 l goLL
                  goRR _ 1 l goL    goLL _ _ r 0
```

Esercizio 4 Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta.

1. La proprietà dei programmi corrispondente all'insieme $\{x \mid x \leq 100\}$ non è estensionale.
2. La proprietà dei programmi corrispondente all'insieme $\{x \mid x \leq 100\}$ è ricorsiva.
3. La proprietà dei programmi corrispondente all'insieme $\{x \mid \phi_x(0) \leq 100\}$ è ricorsivamente enumerabile.

Soluzione

1. Vero. Infatti, considerando per esempio la funzione ϕ_0 calcolata dal programma 0, sappiamo che esistono altri (infiniti) indici che la calcolano, quindi ci sono (infiniti) indici che la calcolano e non appartengono all'insieme, dato che questo è finito; quindi si tratta di una proprietà non estensionale.
2. Vero. Infatti, basta controllare se $x \leq 100$.
3. Vero. Infatti, per avere un algoritmo che semidecide l'insieme basta eseguire il programma con indice x sull'input 0 e se questo termina con un output ≤ 100 restituire vero.

Esercizio 5 Supponiamo di avere un predicato decidibile Q su coppie di numeri naturali $Q(x, y)$. Si consideri il predicato P sui numeri naturali tale che $P(x)$ è vero se e solo se esiste y tale che $Q(x, y)$ è falso. Si descriva un algoritmo di semidecisione per P.

Soluzione Sia $\mathcal{M}_Q$ un algoritmo di decisione per Q. Dato un input x, basta eseguire successivamente l'algoritmo $\mathcal{M}_Q(x, y)$ su tutti gli y. Dato che ogni volta l'algoritmo termina, se esiste un y per il quale la risposta è positiva questo sarà trovato, e in quel caso sappiamo che vale $P(x)$.