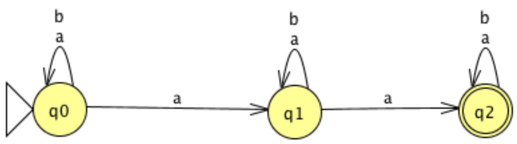
Teoria degli Automi e Calcolabilità a.a. 2021/22
Prova scritta 7 luglio 2022

Esercizio 1 Si consideri il seguente automa a stati finiti non deterministico.



1. Si diano tutte le computazioni possibili per la stringa *abab* e si spieghi se la stringa è riconosciuta e perché.
2. Si descriva il linguaggio riconosciuto.
3. Si scriva l'automa in formato tabellare e lo si trasformi in un automa deterministico.

Soluzione

1. Le computazioni possibili per la stringa *abab* sono:

$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_0, bab\rangle \to \langle q_0, ab\rangle \to \langle q_0, b\rangle \to \langle q_0, \epsilon\rangle$$
$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_0, bab\rangle \to \langle q_0, ab\rangle \to \langle q_1, b\rangle \to \langle q_1, \epsilon\rangle$$
$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_1, bab\rangle \to \langle q_1, ab\rangle \to \langle q_1, b\rangle \to \langle q_1, \epsilon\rangle$$
$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_1, bab\rangle \to \langle q_1, ab\rangle \to \langle q_2, b\rangle \to \langle q_2, \epsilon\rangle$$

La stringa è accettata perché esiste una computazione che termina in uno stato finale.

2. Il linguaggio riconosciuto è l'insieme delle stringhe che contengono almeno due a.

3.

	a	b
$\to q_0$	q_0, q_1	q_0
q_1	q_1, q_2	q_1
$\star q_2$	q_2	q_2

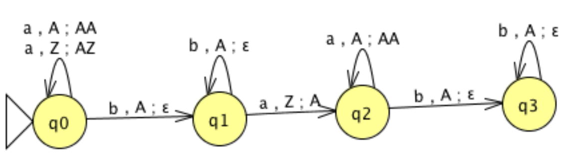
	a	b
$\to \{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\star\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_0, q_1, q_2\}$

Esercizio 2 Si consideri il linguaggio $\{a^n b^n a^m b^m \mid n, m \geq 1\}$.

1. Si dica se è possibile riconoscerlo *per pila vuota* con un PDA deterministico (ossia: in caso di risposta positiva si dia un PDA deterministico che riconosca il linguaggio per pila vuota, in caso di risposta negativa lo si giustifichi).
2. Cosa cambia se consideriamo il linguaggio $\{a^n b^n a^m b^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$?

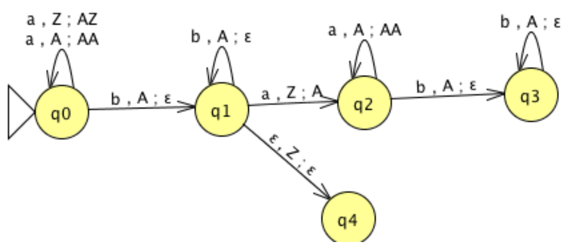
Soluzione

1. Un PDA deterministico che riconosce il linguaggio per pila vuota è il seguente.



La prima parte dell'automa (da q_0 a q_1) controlla che la prima parte della stringa sia del tipo $a^n b^n$ lasciando Z in fondo alla pila. A questo punto, la seconda parte dell'automa (da q_1 in poi) effettua un analogo controllo sulla seconda parte dela stringa, questa volta svuotando completamente la pila.

2. Se consideriamo il linguaggio $\{a^n b^n a^m b^m \mid n \geq 1, m \geq 0\}$, occorre modificare l'automa nel modo seguente:



Questo automa è non deterministico. Non è più possibile dare un automa deterministico perchè il linguaggio contiene due stringhe delle quali una è prefisso dell'altra, per esempio ab e $abab$.

Esercizio 3 Si consideri la seguente macchina di Turing usata come riconoscitore (q_3 è l'unico stato finale).

	a	b	B
q_0	q_1, a, R	q_0, b, R	
q_1	q_2, a, R	q_1, b, R	q_1, B, R
q_2	q_2, a, R	q_2, b, R	q_3, B, N

1. Si descriva la computazione che ha come configurazione iniziale $\langle \epsilon, q_0, baba \rangle$.

2. Si descriva la computazione che ha come configurazione iniziale $\langle \epsilon, q_0, babb \rangle$.

3. Si descriva il linguaggio accettato dalla macchina.

4. Questo linguaggio è ricorsivo?

Soluzione

1. $\langle \epsilon, q_0, baba \rangle \to \langle b, q_0, aba \rangle \to \langle ba, q_1, ba \rangle \to \langle bab, q_1, a \rangle \to \langle baba, q_2, \epsilon \rangle \to \langle baba, q_3, \epsilon \rangle$

2. $\langle \epsilon, q_0, babb \rangle \to \langle b, q_0, abb \rangle \to \langle ba, q_1, bb \rangle \to \langle bab, q_1, b \rangle \to \langle babb, q_1, \epsilon \rangle \to \langle babbB, q_1, \epsilon \rangle \to \langle babbBB, q_1, \epsilon \rangle \to \dots$

3. Il linguaggio accettato dalla macchina è l'insieme delle stringhe che contengono almeno due a.

4. Sì, è un linguaggio regolare.

Esercizio 4 Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta.

1. Sia $\Pi \subseteq \mathbb{N}$ un insieme finito non vuoto, allora la proprietà Π non è estensionale.

2. Se un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è r.e. e non ricorsivo, non può essere $\overline{A} \leq A$.

Soluzione:

1. Vero. Infatti, abbiamo visto che per ogni funzione ricorsiva f esistono infiniti indici x nella numerazione degli algoritmi tali che $\phi_x = f$, quindi una proprietà estensionale non vuota è sempre un insieme infinito.

2. Vero. Se fosse $\overline{A} \leq A$, anche $\overline{A}$ sarebbe ricorsivamente enumerabile, ma allora sarebbero entrambi ricorsivi.

Esercizio 5 Si provi che $\mathcal{P} = \{x \mid \phi_x(y) = 5 \text{ per qualche } y \leq 5\}$ è riducibile a $\mathcal{Q} = \{x \mid \phi_x(y) = 5 \text{ per ogni } y \leq 5\}$, ossia che il problema di determinare se un algoritmo restituisce 5 su almeno un input ≤ 5 è riducibile al problema di determinare se un algoritmo restituisce 5 su tutti gli input ≤ 5.

Soluzione Dobbiamo trasformare un input x per il problema $\mathcal{P}$ (un algoritmo) in un input $x' = g(x)$ per il problema $\mathcal{Q}$ in modo tale che $\phi_x(y) = 5$ per qualche $y \leq 5$ se e solo se $\phi_{x'}(y) = 5$ per ogni $y \leq 5$.
Questo si può ottenere costruendo l'algoritmo $x' = g(x)$ nel modo seguente:

input $y \rightarrow$ se $\phi_x(y) = 5$ per qualche $y \leq 5$ restituisco 5, altrimenti non terminazione

Allora: se $\phi_x(y) = 5$ per qualche $y \leq 5$, l'algoritmo restituisce 5 per qualunque y, quindi in particolare per ogni $y \leq 5$, altrimenti l'algoritmo non termina per qualunque y, quindi in particolare per ogni $y \leq 5$. Si noti che la condizione $\phi_x(y) = 5$ per qualche $y \leq 5$ può essere controllata eseguendo l'algoritmo x in interleaving sugli input da 0 a 5.