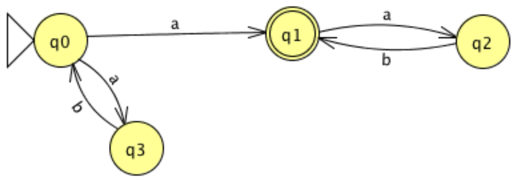
Teoria degli Automi e Calcolabilità a.a. 2021/22
Prova scritta 26 gennaio 2022

Esercizio 1 Si consideri il seguente automa a stati finiti non deterministico.



1. Si spieghi perché la stringa $abab$ non è accettata.
2. Si descriva in modo preciso (per esempio, attraverso un'espressione regolare) il linguaggio riconosciuto.
3. Si scriva l'automa in formato tabellare e lo si trasformi in un automa deterministico.

Soluzione

1. Le computazioni possibili per la stringa $abab$ sono:

$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_1, bab\rangle$$
$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_3, bab\rangle \to \langle q_0, ab\rangle \to \langle q_1, b\rangle$$
$$\langle q_0, abab\rangle \to \langle q_3, bab\rangle \to \langle q_0, ab\rangle \to \langle q_3, b\rangle \to \langle q_0, \epsilon\rangle$$

   Nessuna di queste computazioni è accettante (le prime due sono bloccate, l'ultima termina in uno stato non finale), quindi la stringa è rifiutata.

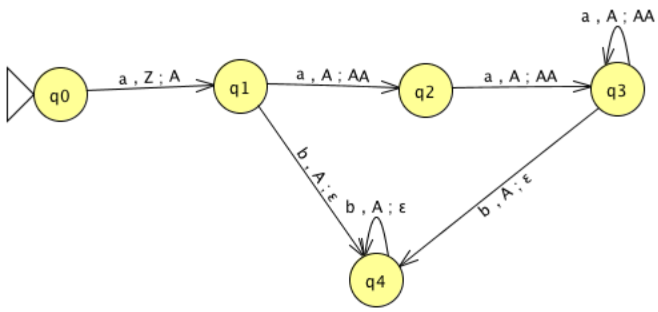
2. Il linguaggio riconosciuto è $(ab)^\star a(ab)^\star$.
3. Diamo l'automa in formato tabellare e il corrispondente automa deterministico.

	a	b
$\to q_0$	q_1, q_3	
$\star q_1$	q_2	
q_2		q_1
q_3		q_0

	a	b
$\to \{q_0\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$
$\star\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
$\star\{q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Esercizio 2 Dare un automa a pila che riconosca (per pila vuota) il linguaggio $\{a^n b^n \mid n \geq 1\} \setminus \{aabb\}$. È possibile dare un automa deterministico?

Soluzione Una possibile soluzione è la seguente:



Questo automa è deterministico.

Esercizio 3 Dare una macchina di Turing che riconosca le stringhe sull'alfabeto $\{0, 1\}$ che terminano con 101.

Soluzione Una possibile soluzione (nel formato del simulatore) è la seguente (la testina si sposta fino alla fine della stringa e poi torna indietro verificando di trovare 101):

```
0 0 0 r goR
0 1 1 r goR

goR 0 0 r goR
goR 1 1 r goR
goR _ _ l goL

goL 1 1 l goLL
goLL 0 0 l goLLL
goLLL 1 1 * halt-accept
```

Esercizio 4 Per ognuno dei seguenti insiemi di programmi (che calcolano funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$) si dica se è ricorsivamente enumerabile, motivando la risposta.

1. L'insieme dei programmi che su nessun input restituiscono un output pari.
2. L'insieme dei programmi che su qualche input restituiscono un output pari in meno di 10 passi.
3. L'insieme dei programmi che sull'input 11 restituiscono un output pari.

Soluzione

1. No. Infatti il complementare, ossia l'insieme dei programmi che su qualche input restituiscono un output pari, è ricorsivamente enumerabile (basta eseguire il programma su ogni input con la tecnica a zig-zag, e se su qualche input viene restituito un output pari accettare). D'altronde entrambi gli insiemi non sono ricorsivi per il teorema di Rice in quanto estensionali e non banali, quindi l'insieme dato non può essere ricorsivamente enumerabile per il teorema di Post.
2. Sì. Infatti, basta eseguire 10 passi successivamente su tutti gli input e se su qualche input viene restituito un output pari accettare.
3. Sì. Infatti, basta eseguire il programma sull'input 11, e se la computazione termina con un output pari accettare.

Esercizio 5 Si provi che, se due linguaggi A e B su Σ sono ricorsivamente enumerabili, allora lo è anche il linguaggio $A \cdot B$. Ricordiamo che $A \cdot B = \{u \cdot v \mid u \in A, v \in B\}$.

Soluzione Dato che A e B sono ricorsivamente enumerabili esistono due algoritmi $\mathcal{M}_A$ e $\mathcal{M}_B$ che data una stringa su Σ restituiscono 1 se la stringa appartiene ad A (rispettivamente, a B), non terminano altrimenti.
Data una stringa $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ su Σ, $n \geq 0$, questa può essere decomposta in due stringhe u e v in $n+1$ modi possibili:

$u_0 = \epsilon$, $v_0 = \sigma_1 \ldots \sigma_n$
$u_1 = \sigma_1$, $v_1 = \sigma_1 \ldots \sigma_n$
$\ldots$
$u_n = \sigma_1 \ldots \sigma_n$, $v_n = \epsilon$

Basta allora eseguire in interleaving:

$$\mathcal{M}_A(u_0),\ \mathcal{M}_B(v_0),\ \ldots,\ \mathcal{M}_A(u_n),\ \mathcal{M}_B(v_n)$$

e se esiste una decomposizione $u_i \cdot v_i$ tale che $u_i \in A$ e $v_i \in B$ questa sarà trovata.