

Teoria degli automi e calcolabilità a.a. 2024/25

Prova scritta 6 febbraio 2026

Esercizio 1 Si minimizzi il seguente DFA

		a	b
$\rightarrow$	q_1	q_3	q_8
	q_2 F	q_3	q_1
	q_3	q_8	q_2
	q_4 F	q_5	q_6
	q_5	q_6	q_2
	q_6	q_7	q_8
	q_7	q_6	q_4
	q_8	q_5	q_8

Soluzione Inizialmente si hanno le classi $\{q_2, q_4\}$ e $\{q_1, q_3, q_5, q_6, q_7, q_8\}$ degli stati finali e non finali. Leggendo b possiamo suddividere la seconda classe in $\{q_1, q_6, q_8\}$ e $\{q_3, q_5, q_7\}$. Abbiamo quindi le classi $\{q_2, q_4\}$, $\{q_1, q_6, q_8\}$ e $\{q_3, q_5, q_7\}$. Non sono possibili ulteriori suddivisioni.

Esercizio 2 Si consideri $L = \{a^n b^m c^k \mid n, m, k \geq 1, n = m \text{ oppure } m = k\}$.

1. Si dia una grammatica context-free che genera il linguaggio.
2. Si dia un automa a pila, se possibile deterministico, che riconosca il linguaggio (per pila vuota), spiegando su quale idea intuitiva è basato.

Soluzione

1. Si noti che il linguaggio è l'unione di $L_1 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 1\}$ e $L_2 = \{a^n b^m c^m \mid n, m \geq 1\}$.

$$\begin{aligned}
 S &::= S_1 \mid S_2 \\
 S_1 &::= XC \\
 S_2 &::= AY \\
 X &::= ab \mid aXb \\
 C &::= c \mid cC \\
 A &::= a \mid aA \\
 Y &::= bc \mid bYc
 \end{aligned}$$

2. Non è possibile riconoscere L con un automa a pila deterministico, perché il linguaggio contiene due stringhe di cui una prefisso dell'altra, per esempio abc e $abcc$. [manca automa a pila]

Esercizio 3 Si definiscano come ricorsive primitive le seguenti funzioni, senza utilizzare altre funzioni.

1. $double: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $double(x) = 2 \cdot x$
2. $pow2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
 $pow2(x) = 2^x$

Soluzione

1. $double(Z) = Z$
 $double(S(x)) = S(double(x))$
2. $pow2(Z) = S(Z)$
 $pow2(S(x)) = double(pow2(x))$

Esercizio 4 Per ognuno dei seguenti insiemi di programmi (che calcolano funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$) si dica se è ricorsivamente enumerabile, motivando la risposta.

1. L'insieme dei programmi che sull'input 10 restituiscono 10.
2. L'insieme dei programmi che su qualche input restituiscono 10 in meno di 10 passi.
3. L'insieme dei programmi che su nessun input restituiscono 10.

Soluzione

1. Sì. Infatti, basta eseguire il programma sull'input 10, e se la computazione termina con output 10 accettare.
2. Sì. Infatti, basta eseguire 10 passi successivamente su tutti gli input e se su qualche input viene restituito 10 accettare.
3. No. Infatti il complementare, ossia l'insieme dei programmi che su qualche input restituiscono 10, è ricorsivamente enumerabile (basta eseguire il programma su ogni input con la tecnica a zig-zag, e se su qualche input viene restituito 10 accettare). D'altronde entrambi gli insiemi non sono ricorsivi per il teorema di Rice in quanto estensionali e non banali, quindi l'insieme dato non può essere ricorsivamente enumerabile per il teorema di Post.