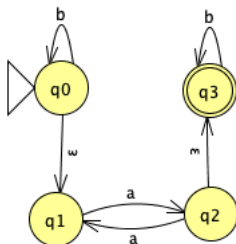


Teoria degli automi e calcolabilità a.a. 2024/25

Prova scritta 13 gennaio 2026

Esercizio 1 Si consideri il seguente automa con ϵ transizioni:



1. Si descriva il linguaggio L accettato da questo automa.
2. Si dia un NFA senza transizioni ϵ equivalente.
3. Si dia un DFA equivalente.

Soluzione

1. Il linguaggio accettato è $\{b^n a^{2m+1} b^k \mid n, m, k \geq 0\}$, ossia il linguaggio denotato dall'espressione regolare $b^* a (aa)^* b^*$.
2. Un NFA senza transizioni ϵ equivalente è il seguente:

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_2, q_3	q_0, q_1
q_1	q_2, q_3	
q_2	q_1	q_3
$\star q_3$		q_3

3. Un DFA equivalente è il seguente.

	a	b
$\rightarrow \{q_0\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1\}$
$\star \{q_2, q_3\}$	$\{q_1\}$	$\{q_3\}$
$\star \{q_3\}$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
$\{q_1\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Esercizio 2 Si consideri $L = \{ab^n a^n b^k \mid n, k \geq 0\}$.

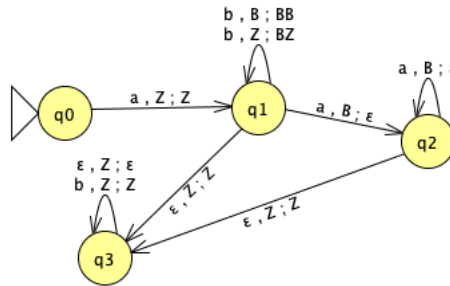
1. Si dia una grammatica context-free che genera il linguaggio.
2. Si dia un automa a pila, se possibile deterministico, che riconosca il linguaggio (per pila vuota), spiegando su quale idea intuitiva è basato.
3. Il linguaggio è regolare? Si giustifichi formalmente la risposta.

Soluzione

1.

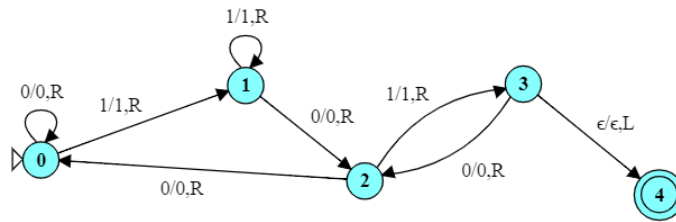
$$\begin{aligned} S &::= aXB \\ X &::= \epsilon \mid bXa \\ B &::= \epsilon \mid bB \end{aligned}$$

2. Non è possibile riconoscere L con un automa a pila deterministico, perché il linguaggio contiene due stringhe di cui una prefisso dell'altra, per esempio a e ab . Un automa a pila non deterministico può essere costruito nel modo seguente:



3. Il linguaggio non è regolare, proviamolo con il pumping lemma. Fissato $n \geq 0$, consideriamo per esempio la stringa $ab^n a^n$, che appartiene al linguaggio. Decomponendo la stringa in uvw , con $|uv| \leq n$ e $|v| > 0$, si ha necessariamente che u e v sono formate dalla a iniziale e poi da sole b . Quindi, per esempio, la stringa uv^0w non contiene la a iniziale, oppure ha un numero di b strettamente minore delle a e quindi non appartiene al linguaggio.

Esercizio 3 Si consideri la seguente macchina di Turing (nella figura ϵ indica il blank, nella vostra soluzione usate B) usata come riconoscitore con alfabeto di input $\{0, 1\}$.



- Si dia la computazione sull'input 1010101.
- Si descriva il linguaggio riconosciuto dalla macchina.
- La macchina nella figura opera sostanzialmente come un DFA. Si descriva una macchina alternativa che non opera come un DFA e riconosce lo stesso linguaggio.

Soluzione

- $\langle \epsilon, 0, 1010101 \rangle \rightarrow \langle 1, 1, 010101 \rangle \rightarrow \langle 10, 2, 10101 \rangle \rightarrow \langle 101, 3, 0101 \rangle \rightarrow \langle 1010, 2, 101 \rangle \rightarrow \langle 10101, 3, 01 \rangle \rightarrow \langle 101010, 2, 1 \rangle \rightarrow \langle 1010101, 3, \epsilon \rangle \rightarrow \langle 101010, 4, 1 \rangle$
- Il linguaggio riconosciuto è l'insieme delle stringhe che terminano con 101.
- Una macchina alternativa per riconoscere lo stesso linguaggio arriva alla fine della stringa in input e verifica che termini con 101 tornando indietro.

Esercizio 4 Sia L un linguaggio su un alfabeto (finito) Σ . Assumiamo di ordinare le stringhe su Σ prima secondo la lunghezza, e quelle della stessa lunghezza in ordine alfabetico (lessicografico).

1. Se L è ricorsivo, è possibile numerare effettivamente L (ossia, dare un programma che generi successivamente tutte le stringhe di L) con l'ordine sopra descritto?
2. Se è possibile numerare effettivamente L con l'ordine sopra descritto, possiamo concludere che L sia ricorsivo?

Motivare adeguatamente le risposte.

Soluzione

1. Sì, basta generare tutte le stringhe sull'alfabeto Σ con l'ordine descritto, e per ognuna controllare se appartiene a L utilizzando l'algoritmo di riconoscimento.
2. Sì, infatti per decidere u appartiene a L . basta generare successivamente tutte le stringhe in L con l'ordine descritto, e andare avanti finché si verifica uno dei seguenti due casi:
 - (a) si genera la stringa u , quindi possiamo concludere che $u \in L$
 - (b) si genera una stringa che segue u nell'ordinamento, quindi possiamo concludere che $u \notin L$

Si noti che, se non si verifica il caso (a), si verifica sicuramente il caso (b), perché le stringhe che precedono u nell'ordinamento sono un insieme finito.