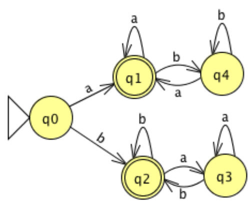
Teoria degli Automi e Calcolabilità a.a. 2024/25
Prova scritta 9 settembre 2025

Esercizio 1 Si consideri il linguaggio L formato dalle stringhe di a e b che iniziano e terminano con la stessa lettera (incluse a e b).

1. Si dia un DFA che accetta questo linguaggio.
   Un DFA che riconosce il linguaggio è il seguente:



2. Si dia un'espressione regolare che denota L.
   $a(a+b)^\star a + b(a+b)^\star b + a + b$

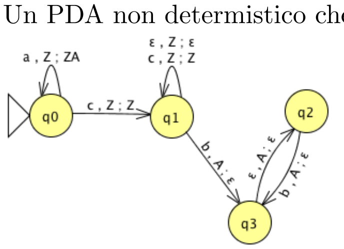
3. Si provi che il DFA dato è minimo (o se non lo è lo si minimizzi).
   Inizialmente abbiamo le due classi di equivalenza $\{q_0, q_4, q_3\}$ e $\{q_1, q_2\}$. Leggendo a posso distinguere q_0, q_4 da q_3 e q_1 da q_2, quindi otteniamo $\{q_0, q_4\}$, $\{, q_3\}$, $\{q_1\}$, $\{q_2\}$. Infine leggendo b possiamo distinguere q_0 da q_4 quindi l'automa era minimo.

Esercizio 2 Si dica se l'insieme delle stringhe della forma $a^{2n}c^m b^n$, con $n \geq 0$, $m \geq 1$, può essere riconosciuto 1) da un automa a stati finiti 2) da un PDA deterministico (per pila vuota) 3) da un PDA. Giustificare le risposte.

1. Questo linguaggio non è regolare, possiamo vederlo con il pumping lemma. Infatti, dato $n \geq 0$, consideriamo per esempio la stringa $a^{2n}cb^n$ che appartiene al linguaggio. Decomponendo la stringa in uvw, con $|uv| \leq n$ e $|v| > 0$, si ha necessariamente che u e v sono formate di sole a. Quindi, per esempio, la stringa uv^0w ha un numero di a strettamente minore di $2n$ e quindi non appartiene al linguaggio.

2. Questo linguaggio non può essere riconosciuto (per pila vuota) da un DPDA perchè contiene le stringhe c e cc delle quali una è prefisso dell'altra.

3. Un PDA non determistico che riconosce il linguaggio è il seguente:



Esercizio 3 Si dica se i seguenti insiemi sono ricorsivamente enumerabili.

1. L'insieme degli algoritmi che non danno mai come output un numero minore di 10.

2. L'insieme degli algoritmi che su qualche input terminano in (meno di) 10 passi.

3. L'insieme degli algoritmi che terminano in (meno di) 10 passi su tutti gli input ≤ 10.

Soluzione

1. Falso. Consideriamo l'insieme complementare, l'insieme $\mathcal{A}$ degli algoritmi che restituiscono un numero minore di 10 su qualche input ($\mathcal{A} = \{x \mid \exists y \text{ s.t. } \phi_x(y) < 10\}$). Questo insieme non è ricorsivo per il teorema di Rice (estensionale e non banale), ed è ricorsivamente enumerabile (infatti basta eseguire l'algoritmo su tutti gli input con la tecnica a zig-zag e se esiste un input su cui l'algoritmo restituisce un numero minore di 10 questo sarà trovato). Quindi per il teorema di Post l'insieme degli algoritmi x che non danno mai come output un numero minore di 10 non può essere ricorsivamente enumerabile.

2. Vero. Basta eseguire successivamente l'algoritmo x per 10 passi su tutti gli input, e se esiste un input sul quale termina questo sarà trovato.

3. Vero, anzi l'insieme è ricorsivo. Basta eseguire successivamente l'algoritmo x per 10 passi su tutti gli input ≤ 10, e se esiste un input sul quale termina questo sarà trovato e la risposta sarà positiva, altrimenti sarà negativa.

Esercizio 4 Sia A un insieme ricorsivamente enumerabile, e sia $\mathcal{A}_A^k$ l'esecuzione di (al più) k passi di un algoritmo che semi-decide A, che restituisce `F` se dopo k passi non si ha terminazione.

1. Si descriva in pseudocodice un algoritmo che semidecide A^{10}, l'insieme delle sequenze formate da dieci elementi di A.

2. Anche $A^\star$ è ricorsivamente enumerabile?

Soluzione

1. Assumiamo che l'input dell'algoritmo siano sequenze di 10 elementi. In realtà non è necessario usare $\mathcal{A}_A^k$ ma possiamo usare semplicemente $\mathcal{A}_A$. Assumendo che quest'ultimo non termini se l'input $\notin A$:

   ```
   input a_1 ... a_10
   i = 1
   while (i≤10)
     if (𝒜_A(a_i)) i++
   return true
   ```

   Ho comunque considerato giuste anche soluzioni che usano $\mathcal{A}_A^k$, per esempio:

   ```
   input a_1 ... a_10
   k = 0
   while (true)
     i = 1; result = true
     while (i≤10)
       if (!𝒜_A^k(a_i)) result = false
       i++
     if result return true else k++
   ```

2. Sì. Un algoritmo che semidecide $A^\star$ è analogo al precedente, assumendo che l'input dell'algoritmo siano sequenze di lunghezza arbitraria, restituendo `true` sulla sequenza vuota e sostituendo 10 con la lunghezza di `s` come limite superiore.