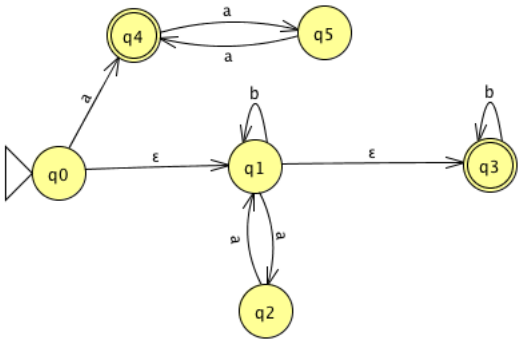
Teoria degli Automi e Calcolabilità a.a. 2024/25
Prova scritta 11 giugno 2025

Esercizio 1 Si consideri il seguente automa con ϵ transizioni:



1. Si descriva il linguaggio accettato dall'automa.
2. Si dia un NFA senza transizioni ϵ equivalente.

Soluzione

1. Le stringhe accettate dall'automa sono di due tipi: a^n con n dispari, oppure $u_1 \dots u_n$, $0 \leq n$, dove ogni u_i è aa oppure b.
2. Diamo l'automa anche in formato tabellare.

	a	b	ϵ
$\rightarrow q_0$	q_4		q_1
q_1	q_2	q_1	q_3
q_2	q_1		
$\star q_3$		q_3	
$\star q_4$	q_5		
q_5	q_4		

Un NFA senza transizioni ϵ equivalente è il seguente.

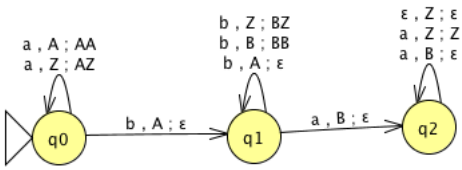
	a	b
$\rightarrow \star q_0$	q_2, q_4	q_1, q_3
q_1	q_2	q_1, q_3
q_2	q_1, q_3	
$\star q_3$		q_3
$\star q_4$	q_5	
q_5	q_4	

Esercizio 2 Si consideri il linguaggio $L = \{a^n b^{n+k} a^m \mid 1 \leq n, 1 \leq k \leq m\}$.

1. Si dia un'automa a pila che riconosce il linguaggio, spiegando su quale idea intuitiva è basato.
2. È possibile riconoscere questo linguaggio (per pila vuota) con un PDA deterministico?

Soluzione

1. Osservando che il linguaggio può anche essere scritto come $\{a^n b^n b^k a^{k+h} \mid 1 \leq n, 1 \leq k, 0 \leq h\}$, possiamo procedere come segue: mettiamo sulla pila una A per ogni a letta, poi quando leggiamo la prima b passiamo in un nuovo stato ed eliminiamo una A per ogni a letta. Avendo lasciato il simbolo Z in fondo alla pila, questo sarà in cima alla pila dopo aver letto per n volte b. A questo punto possiamo procedere analogamente mettendo in pila una B per ogni b letta, poi quando leggiamo la prima a passiamo in un nuovo stato ed eliminiamo una B per ogni a letta. Avendo lasciato il simbolo Z in fondo alla pila, questo sarà in cima alla pila dopo aver letto per n volte a. A questo punto possiamo leggere altre a o terminare.



2. No, perché il linguaggio contiene due stringhe delle quali una è prefisso dell'altra, per esempio *abba* e *abbaa*.

Esercizio 3

1. Si dia una macchina di Turing sull'alfabeto $\{0, 1, B\}$ che, a partire da una configurazione iniziale con solo uno 0 sul nastro, riempie indefinitamente il nastro con 1 sia a sinistra che a destra dello 0 iniziale.

2. Data una funzione ricorsiva primitiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si scriva come ricorsivo primitivo il predicato $haszero_f\colon \mathbb{N} \to \{0,1\}$ tale che $haszero_f(x) = 1$ se e solo se $f(y)$ è zero per qualche $y < x$. Si possono utilizzare le funzioni definite nelle note.

Soluzione

1.
```
0 0 0 r 0    goL 1 1 l goL
0 1 1 r 0    goL _ 1 r 0
0 _ 1 l goL  goL 0 0 l goL
```

2. $haszero_f(Z) = Z$
$haszero_f(S(y)) = sg(\overline{sg}(f(y)) + haszero_f(y))$

Esercizio 4

1. Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva e A un insieme ricorsivamente enumerabile, allora $\{x \mid f(x) \in A\}$ è ricorsivamente enumerabile? Giustificare la risposta.

2. Sia $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva e A un insieme ricorsivo, allora $\{f(x) \mid x \in A\}$ è ricorsivamente enumerabile? Giustificare la risposta

3. Siano $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ due insiemi ricorsivamente enumerabili, e indichiamo con $\mathcal{A}^k_{\mathcal{P}}$ l'esecuzione di k passi dell'algoritmo che semidecide $\mathcal{P}$, e analogamente per $\mathcal{Q}$. Si descriva in pseudocodice un algoritmo che semidecide $\{x \mid x \notin \mathcal{P} \Rightarrow x + 1 \in \mathcal{Q}\}$.

4. L'insieme $\mathcal{A} = \{x \mid \phi_x(x) \uparrow \text{ oppure } \phi_x(x) = 5\}$, ossia l'insieme dei programmi che su se stessi non terminano oppure restituiscono 5, è ricorsivamente enumerabile? Giustificare accuratamente la risposta.

Soluzione

1. Sì. Dato $x \in \mathbb{N}$, per semidecidere se $f(x) \in A$, basta eseguire prima l'algoritmo che calcola f e se questo termina con risultato y eseguire l'algoritmo che controlla se $y \in A$.

2. Sì. Dato $y \in \mathbb{N}$, per semidecidere se $f(x) = y$ per qualche $x \in A$, basta eseguire l'algoritmo che calcola f su tutti i naturali con la tecnica a zig-zag, e per tutti gli x tali che $f(x) = y$ controllare se $x \in A$.
   Prova alternativa: data f ricorsiva possiamo definire $f_{|A} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nel modo seguente:

   $$f_{|A}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \\ \uparrow & \text{altrimenti} \end{cases}$$

   Questa funzione è ricorsiva, ed ha come immagine $\{f(x) \mid x \in A\}$.

3. Notiamo che l'implicazione risulta vera se e solo se $x \in \mathcal{P}$ oppure $x + 1 \in \mathcal{Q}$.

   ```
   input x
   k = 0
   while (true)
    if A^k_P(x)=1 return 1
    if A^k_Q(x)=1 return 1
    k++
   ```

4. Consideriamo il complementare, ossia l'insieme $\{x \mid \phi_x(x) = y \neq 5\}$. Questo insieme è ricorsivamente enumerabile (basta eseguire l'algoritmo x su x e se questo termina possiamo controllare se il risultato y è uguale a 5). Inoltre è non ricorsivo: si può ridurre in modo banale $\mathcal{K}$ a questo insieme trasformando un programma in modo che restituisca per esempio 1 in caso di terminazione. Quindi l'insieme $\mathcal{A}$ non può essere ricorsivamente numerabile per il teorema di Post.

Guida alla correzione

1.1 5 a chi ha fatto giusta solo la parte delle a in numero dispari.

1.2 -2 per non aver messo q_0 finale.

4.2 7 a chi non ha usato zig-zag

4.4 L'insieme $\mathcal{A}$ **non è** estensionale (dipende non solo da ϕ_x ma anche dall'indice x dato in input). Ho dato 9 a chi ha fatto tutto giusto a parte questo; 5 a chi ha sbagliato la definizione del complementare.